Решение задания 10 ЕГЭ

При решении подобных задач предлагается использовать некоторые законы комбинаторики, достаточно редко используемые в школе, но которые очень помогают в работе.

Задача 1

Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы З, И, М, А, причём в каждом слове есть ровно одна гласная буква и она встречается ровно 1 раз. Каждая из допустимых согласных букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение

Нарисуем такую табличку из 5 ячеек:

Рассмотрим первую гласную букву И. Внесем в первую ячейку букву И. в остальные ячейки можно вписать согласно условию одну из согласных букв З или М, то есть вариантов согласных в оставшихся четырех ячейках может быть два: либо З либо М. Согласно закону комбинаторики для подсчета количества вариантов с согласными буквами будет **1x2x2x2x2**, или 16 вариантов слов, которые будут начинаться с буквы И.

И	**2**	**2**	**2**	**2**		
1	**2**	**2**	**2**	**2**	**=16**	Число 1 означает, что вариантов только 1, а число 2 – что вариантов 2

Буква И может стоять и на втором месте:

2	**И**	**2**	**2**	**2**	**= 16**

Потом на 3-м, 4-м и 5-м месте:

И	**2**	**2**	**2**	**2**		**= 16**
2	**И**	**2**	**2**	**2**		**= 16**
2	**2**	**И**	**2**	**2**		**= 16**
2	**2**	**2**	**И**	**2**		**= 16**
2	**2**	**2**	**2**	**И**		**= 16**

Получилось всего 80 вариантов слов, начинающихся с буквы И: 16 х 5=80.

То же самое мы получим и с буквой А – тоже 80 вариантов. В сумме – 160 вариантов.

Ответ – 160

Задача 2

Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причём буква С используется в каждом слове ровно 2 раза. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение

Отвлечемся от условия задачи и посчитаем, сколько вариантов слов будет с использование четырех букв.

4	**4**	**4**	**4**	**= 4^4**	Четырехбуквенное слово

4	**4**	**4**	**4**	**4**	**= 4^5**	Пятибуквенное слово

Предположим, что две буквы С стоят рядом на 1-й и 2-й позициях:

С	**С**	**3**	**3**	**3**		Число 3 – это вариант из трех букв – Л, О, Н
1	**1**	**3**	**3**	**3**	**= 3^3 = 27**	Число 1 – это значит, что вариант только 1

Количество вариантов слов с двумя С на первой и второй позициях будет **1х1х3х3х3 = 27** (по правилам комбинаторики).

С может стоять не только на первом и втором месте, но и на первом и третьем.

С	**3**	**С**	**3**	**3**		Число 3 – это вариант из трех букв – Л, О, Н
1	**3**	**1**	**3**	**3**	**= 3^3 = 27**	Число 1 – это значит, что вариант только 1

Теперь стоит вопрос – сколько существует способов расставить эти две буквы С в пятибуквенном слове. Есть два варианта решения – первый вариант - перебрать все способы вручную.

С	**С**	**3**	**3**	**3**
С	**3**	**С**	**3**	**3**
С	**3**	**3**	**С**	**3**
С	**3**	**3**	**3**	**С**

4 варианта

Количество слов в варианте будет 1х1х3х3х3 = 27

3	**С**	**С**	**3**	**3**
3	**С**	**3**	**С**	**3**
3	**С**	**3**	**3**	**С**

3 варианта

Количество слов в варианте будет 1х1х3х3х3 = 27

3	**3**	**С**	**С**	**3**
3	**3**	**С**	**3**	**С**

2 варианта

Количество слов в варианте будет 1х1х3х3х3 = 27

3	**3**	**3**	**С**	**С**

1 вариант

Количество слов в варианте будет 1х1х3х3х3 = 27

Обратить внимание – при движении сверху вниз количество вариантов уменьшается, так остальные варианты уже были учтены.

Всего получилось 4+3+2+1 = 10 вариантов. Каждый вариант дает 27 слов, итого будет 10 х 27 = 270 слов.

Понятно, что такой перебор сложный, есть большая вероятность ошибиться, особенно если будет увеличиваться количество букв в слове.

Обратимся к комбинаторике и определим число сочетаний в слове. Оно определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Здесь – **C** – количество сочетаний; **n** – число предметов; **k** – число позиций. Конкретно к нашей задаче – C – количество слов, n – число букв в слове, k – количество букв С в слове. Обязательно должно выполняться условие **n > k**.

Перенесем в формулу наши исходные данные:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Здесь у нас 2 - количество букв С, 5 – количество букв в слове. Как и при ручном переборе получилось 10 вариантов, каждый из которых дает 27 слов, что в итоге дает нам ответ – 270.

Ответ – 270

Задача 3

Вася составляет 6-буквенные слова, в которых есть только буквы П, Т, И, Ц, А, причём буква И используется в каждом слове хотя бы 3 раза. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение

Выражение буква И используется в каждом слове хотя бы 3 раза означает, что буква И в слове может быть 3, 4, 5 и 6 раз.

Рассмотрим случай, когда она встречается 3 раза.

И	**И**	**И**	**4**	**4**	**4**	**= 4^3 = 64**

Буква И может стоять и на других местах в слове. Варианты можно перебрать вручную. Но проще использовать формулу поиска вариантов из комбинаторики.

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

, где С – количество вариантов, n – количество букв в слове, k – количество букв И в слове. Подставляем данные в формулу.

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Получили 20 вариантов, причем каждый дает (смотри выше) 64 слова. В итоге в случае, когда И встречается в слове 3 раза имеем 64 х 20 = 1280 слов.

Рассмотрим случай, когда она встречается 4 раза.

И	**И**	**И**	**И**	**4**	**4**	**= 4^2 = 16**

Опять используем формулу подсчета количества слов

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15$$

Подсчитаем количество слов в случае, когда И встречается в слове 4 раза: 16 х15 = 240

Рассмотрим случай, когда она встречается 5 раз.

И	**И**	**И**	**И**	**И**	**4**	**= 4^1 = 4**

$$C_6^5 = \frac{6!}{5! \cdot (6-5)!} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 6$$

Получаем 6 х 4 = 24 слова.

И последний случай – это когда И встречается в слове 6 раз. Здесь только один вариант – 1 слово.

И	**И**	**И**	**И**	**И**	**И**	**1**

Осталось сложить все эти варианты: 1280 + 240 + 24 + 1 = 1545 слов

Ответ – 1545

Задача 4

Сколько различных шестибуквенных слов можно составить из символов Д, О, Л, Я, при условии, что каждая из букв Д, О, Л обязательно должна быть соседкой буквы Я, но при этом две буквы Я рядом стоять не могут?

Решение

Напишем все возможные положения букв Я в слове, буквой "х" обозначим одну из букв Д, О, Л, причем она обязательно должна быть соседкой буквы Я:

ЯхЯхЯх

ЯхЯххЯ

ЯххЯхЯ

хЯхЯхЯ

хЯххЯх

По законам комбинаторики для каждой из первых четырех положений букв Я существует 3*3*3 = 27 слов. Для последнего варианта существует 3*3*3*3 = 81 слово.

Общее количество слов: 4*27 + 81 = 189

Ответ – 189

Задача 5

Ученик составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов используются 4-буквенные слова, в которых есть только буквы А, Б, В, Г, Д и Е, причём буква Г появляется ровно 1 раз и только на первом или последнем месте. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем.

Сколько различных кодовых слов получится в результате?

Решение

Построим такую табличку.

Буква Г может стоять или в начале или в конце слова:

Г			

			Г

Всего букв у нас 6, исключаем Г – остается 5. На пустых местах в таблице может стоять любая буква из этих 5:

Г	**5**	**5**	**5**	**125 слов**

5	**5**	**5**	**Г**	**125 слов**

По правилам комбинаторики в каждом из этих двух вариантов расположения Г мы получаем **5 х 5 х 5 = 125** различных слов, или всего 250 слов.

Ответ – 250 слов
