Решение задания 2 ЕГЭ

Задание 2 ЕГЭ является достаточно сложным для понимания. Объяснение материала в сети Интернет не всегда простое. В предлагаемой работе сделана попытка упростить понимание и решение задания 2 . Так, рассматривать логические функции с неполностью заполненной таблицей истинности мы будем построением таблиц тетрад (триад), а решать логические функции с полностью заполненной таблицей истинности – с помощью метода уникальных строк. Применение этих способов не всегда быстрее, зато решение интуитивно понятно.

Теоретические сведения для решения задания 2

1) Логическое умножение или конъюнкция:

Конъюнкция - это сложное логическое выражение, которое считается истинным в том и только том случае, когда оба простых выражения являются истинными, во всех остальных случаях данное сложенное выражение ложно.
Обозначение: F = A&B, $A \wedge B$, A*B

Таблица истинности для конъюнкции:

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

2) Логическое сложение или дизъюнкция:

Дизъюнкция - это сложное логическое выражение, которое истинно, если хотя бы одно из простых логических выражений истинно и ложно тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения ложны.
Обозначение: F = $A \vee B$, A+B

Таблица истинности для дизъюнкции:

A	B	F
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3) Логическое отрицание или инверсия:

Инверсия - это сложное логическое выражение, если исходное логическое выражение истинно, то результат отрицания будет ложным, и наоборот, если исходное логическое выражение ложно, то результат отрицания будет истинным. Другими простыми слова, данная операция означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица НЕ или слова НЕВЕРНО, ЧТО.

Обозначение: F = ¬A, $\overline{A}$

Таблица истинности для инверсии:

A	¬A
1	0
0	1

4) Логическое следование или импликация:

Импликация - это сложное логическое выражение, которое истинно во всех случаях, кроме как из истины следует ложь. То есть данная логическая операция связывает два простых логических выражения, из которых первое является условием (A), а второе (B) является следствием.

«A → B» истинно, если из A может следовать B.

Обозначение: F = A → B.

Таблица истинности для импликации:

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) Логическая равнозначность или эквивалентность:

Эквивалентность - это сложное логическое выражение, которое является истинным тогда и только тогда, когда оба простых логических выражения имеют одинаковую истинность.
«A ↔ B» истинно тогда и только тогда, когда A и B равны.
Обозначение: F = A ↔ B,   A ≡ B
Таблица истинности для эквивалентности:

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Порядок выполнения логических операций в сложном логическом выражении

1. Действия в скобках;
2. Инверсия;
3. Конъюнкция;
4. Дизъюнкция;
5. Импликация;
6. Эквивалентность.

Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются скобки.

Законы алгебры логики

Закон противоречия

Если одно и то же высказывание в выражении одновременно и истинно, и ложно, то результатом выражение будет ложь:

$$A \land \neg A = 0$$

Закон исключённого третьего

$$A \lor \neg A = 1$$

Закон двойного отрицания

Если одно высказывание отрицается дважды, то результатом будет исходное высказывание:

$$\neg(\neg A) = A$$

Законы де Моргана (законы общей инверсии)

Отрицание конъюнкции является дизъюнкцией отрицаний:

$$\neg(A \land B) = \neg A \lor \neg B \qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

Отрицание дизъюнкции является конъюнкцией отрицаний:

$$\neg(A \lor B) = \neg A \land \neg B \qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Закон ассоциативности (сочетательный закон)

При логическом умножении или логическом сложении нескольких операторов можно произвольно использовать скобки, или не использовать их вовсе:

$$A \land B \land C = (A \land B) \land C = A \land (B \land C)$$
$$A \lor B \lor C = (A \lor B) \lor C = A \lor (B \lor C)$$

Закон дистрибутивности (распределительный закон)

Вынос за скобки общих множителей и общих слагаемых:

$$(A \lor B) \land (A \lor C) = A \lor (B \land C)$$
$$(A \land B) \lor (A \land C) = A \land (B \lor C)$$

Закон преобразования импликации

$$A \rightarrow B = \neg A \lor B$$

Закон преобразования эквивалентности

$$A \equiv B = (\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B) = (A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$$

Закон исключения (закон склеивания)

$$(A \land B) \lor (\neg A \land B) = B$$
$$(A \lor B) \land (\neg A \lor B) = B$$

Закон поглощения

$$A \vee (A \wedge B) = A$$
$$A \wedge (A \vee B) = A$$

Переместительный закон (коммутативный закон)

Аналогичен математическому "от перемены мест слагаемых (множителей) сумма (произведение) не меняется:

$$A \wedge B = B \wedge A$$
$$A \vee B = B \vee A$$

Для замены операции эквивалентности существует два правила:

$$A \Leftrightarrow B = (A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, \overline{B})$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \vee \overline{B}) \,\&\, (\overline{A} \vee B)$$

Логическая сумма A + B + C + … равна 0 (выражение ложно) тогда и только тогда, когда все слагаемые одновременно равны нулю, а в остальных случаях равна 1 (выражение истинно)

Логическое произведение A · B · C · … равно 1 (выражение истинно) тогда и только тогда, когда все сомножители одновременно равны единице, а в остальных случаях равно 0 (выражение ложно)

Таблица истинности выражения определяет его значения при всех возможных комбинациях исходных данных.

Количество строк в таблице истинности, равно 2^k, где k – число переменных; например, таблица истинности выражения с тремя переменными содержит 2^3=8 строчек.

===

Примеры решения задач

Задача 1

Логическая функция *F* задаётся выражением **(¬z)∧*x* ∨ *x*∧*y*.** Определите, какому столбцу таблицы истинности функции *F* соответствует каждая из переменных *x, y, z.*

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

В ответе напишите буквы *x, y, z* в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала – буква, соответствующая 1-му столбцу; затем – буква, соответствующая 2-му столбцу; затем – буква, соответствующая 3-му столбцу). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение

Вначале перепишем условие в более простом для понимания виде:

F=(¬z)∧*x* ∨ *x*∧*y* = ¬z*x+x*y

Решим задачу очень простым способом – методом так называемых «уникальных строк».
Этот способ подходит для тех случаев, когда все ячейки в таблице заполнены.
Уникальная строка – это та строка, в которой из переменных есть только одна единица, остальные переменные в этой строке нули. Это строки 2, 3, 5. Теперь смотрим, в какой из этих строк функция F равна 1. Это строка 2. в ней две переменные равны 0, а одна равна 1:

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
2	0	0	1	1

Предположим, что x=1. Тогда y=0 и z=0. Проверяем это предположение на исходном уравнении **¬z*x+x*y =1** (так как F=1).
1*1+1*0=1+0=1 – это нам подходит

На всякий случай можно проверить и другие варианты:
y=1, тогда x=0 и z=0: 1*0+0*1=0 - не подходит,
z=1, тогда x=0 и y=0: 0*0+0*1=0 - не подходит.
Мы получили, что третий столбец – это x.
Возвращаемся к исходной таблице.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	X	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Теперь ищем вторую уникальную строку в первом и втором столбцах (на третий столбец внимания не обращаем, он уже известен) – в которой есть две единицы. Это строки 3, 4, 5 и 6. Нам подходит строка, в которой F=1. Это строка 4.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	X	F
4	0	1	1	1

Предположим, что y=1, тогда x=1 и z=0. Проверяем это предположение на исходном уравнении **¬z ****x*** + ***x******y=1** (так как F=1).
1*1+1*1=1 – это нам подходит.
На всякий случай можно проверить и другие варианты:
z=0, тогда x=1 и y=0:   0*1+1*0=0 - не подходит.
Таким образом, второй столбец будет y, тогда первый – z.

				Функция
	Z	У	X	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Ответ: zyx

===

Точно такая же **задача 2** (решить самостоятельно аналогично вышеприведенной).
Дано: F=(x∧y) ∨(¬x∧¬z)

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	0
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Ответ – xzy

==

Похожая **задача 3**

Дано: **¬a ∧ b ∧ (c ∨ ¬d)**

Задание: определить наименование столбцов в таблице:

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Переем.4	Функция
1	0	1	0	0	1
2	1	1	0	0	1
3	1	1	0	1	1

Есть правило при решении таких задач – если последнее действие в логической функции дизъюнкция, то следует рассматривать случай, когда F = 0, а вот если последнее действие конъюнкция – то случай, когда F = 1. Так придется делать меньше переборов вариантов.

В условии видим, что между тремя переменными стоит знак конъюнкции. Функция будет равна единице только тогда, когда все три переменные будут равны 1.
Переменная **¬a** – это отрицание а, значит чтобы **¬a** было равно 1, надо чтобы все **a** были равны нулю. У нас такой столбец третий.
Далее, надо, чтобы **b** было равно 1 – такой столбец у нас второй. Получилось:

	Перем. 1	b	a	Переем.4	Функция
1	0	1	0	0	1
2	1	1	0	0	1
3	1	1	0	1	1

Остается определить каким переменным соответствуют первый и четвертый столбцы. Поскольку столбцы **a** и **b** уже определены, оставшаяся таблица получилась такой:

	Перем. 1	Переем.4	Функция
1	0	0	1
2	1	0	1
3	1	1	1

Ищем уникальную строку - там, где есть только одна единица в переменных и F равно единице. Это вторая строка.
Этой таблице соответствует переменная **(c + ¬d)**.
Предположим, что c=1, тогда d=0. отсюда следует: **(1+1)= 1** - такое нам подходит.
На всякий случай проверим вариант d=1, тогда c=0: **(0+0)= 0** - не подходит.
Значит, переменная 1 будет **c**, а переменная 4 будет **d**. Исходная таблица тогда примет вид

	c	b	a	d	Функция
1	0	1	0	0	1
2	1	1	0	0	1
3	1	1	0	1	1

Ответ: **cbad**

===

Задача 4

Логическая функция *F* задается выражением
(¬x ∧ ¬y) ∨ (y ≡ z) ∨ ¬w
На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий **все** наборы аргументов, при которых функция *F* **ложна**. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции *F* соответствует каждая из переменных ***w, x, y, z.*** Все строки в представленном фрагменте разные.

	Перем.1	Перем.2	Перем.3	Перем.4	Функция
1	0		0	1	0
2		0		1	0
3	0	1	1		0

Перепишем условие несколько по другому. Последним действием в этом выражении будет дизъюнкция. Дизъюнкция – это логическое сложение, она всегда будет равна нулю тогда, когда все слагаемые будут равны нулю, то есть все три слагаемые должны быть одновременно равны нулю: **(¬x * ¬y)=0, (y ≡ z)=0, ¬w=0.**

Обращает на себя внимание третье слагаемое **¬w=0.** это логическое отрицание, то есть **w** всегда должно быть равно 1 чтобы **¬w=0.**Анализируя таблицу можно сделать вывод что такое может быть только в четвертом столбике, если в нем в третьей строке поставить единицу. В других столбиках такое сделать нельзя. То есть четвертый столбик – это **w**.

	Перем.1	Перем.2	Перем.3	W	Функция
1	0		0	1	0
2		0		1	0
3	0	1	1	1	0

Теперь, не учитывая четвертый столбик, построим таблицу истинности для ***x, y, z*** для всех возможных вариантов переменных. В этой таблице истинности будет 2^3=8 строк. Такая таблица строится как обычная таблица тетрад: в первом столбике сверху вниз 4 нуля и 4 единицы, во втором – 2 нуля, 2 единицы и так до конца, в третьем – чередование 0 и 1 до конца. Далее в столбиках справа вычисляем значения **(¬x * ¬y)** и **(y ≡ z).** При этом помним, что эти значения должны быть одновременно равны нулю.

X	Y	Z	(¬x * ¬y)	(y ≡ z)	
0	0	0	1		Эти 2 строки вычеркиваем, так как значение **(¬x * ¬y)** равно единице
0	0	1	1		
0	**1**	**0**	0	0	
0	1	1	0	1	Эти 2 строки вычеркиваем, так как значение **(y ≡ z)** равно единице
1	0	0	0	1	
1	**0**	**1**	0	0	
1	**1**	**0**	0	0	
1	1	1	0	1	Эту строку вычеркиваем, так как значение **(y ≡ z)** равно единице

Теперь количество строк в таблице уменьшилось:

X	Y	Z
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Посмотрим теперь на исходную таблицу:

	Перем.1	Перем.2	Перем.3	W	Функция
1	0		0	1	0
2		0		1	0
3	0	1	1	1	0

Анализируем, куда можно поставить столбик X

X
0
1
1

Явно, что в третий столбик исходной таблицы:

	Перем.1	Перем.2	X	W	Функция
1	0		0	1	0
2		0	1	1	0
3	0	1	1	1	0

Размышляя аналогично, столбикY

Понятно, что во второй столбик исходной таблицы:

Y
1
0
1

	Перем.1	Y	X	W	Функция
1	0	1	0	1	0
2		0	1	1	0
3	0	1	1	1	0

Остался незаполненным третий столбик Z
Он вписывается только в первый столбик исходной таблицы:

Z
0
1
0

	Z	Y	X	W	Функция
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	0
3	0	1	1	1	0

Таким образом, ответ – **ZYXW**

Аналогичная **задача 5**. Решается по образу и подобию предыдущей. Решить самостоятельно.

Дано: функция **(¬x ∧ ¬y) ∨ (y ≡ z) ∨ w** и к этой функции частично заполненная таблица истинности:

	Перем.1	Перем.2	Перем.3	Перем.4	Функция
1	0	1			0
2	1		1	0	0
3		1	1	0	0

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных *w*, *x*, *y*, *z*.
Ответ к этой задаче – **ZYXW**

===

Аналогичная **задача 6**. Решается по образу и подобию предыдущих. Решить самостоятельно.

Дано: Логическая функция *F* задается выражением
(x ∧ ¬y) ∨ (y ≡ z) ∨ ¬w
На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий **все** наборы аргументов, при которых функция *F* **ложна**. Определите, какому столбцу таблицы

истинности функции *F* соответствует каждая из переменных *w*, *x*, *y*, *z*. Все строки в представленном фрагменте разные.

	Перем.1	Перем.2	Перем.3	Перем.4	Функция
1		0			0
2	1	0		0	0
3	1		0	0	0

Ответ – **WZYX**

==

Еще несколько задач с решением по методу уникальных строк.

Задача 7

Логическая функция *F* задается выражением
¬(z ⋁ (y ⋀ ¬x))

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных *x*, *y*, *z*.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Решение

Преобразуем выражение по закону Де Моргана **¬(a ⋁ b) = ¬a ⋀ ¬b** :

¬(z ⋁ (y ⋀ ¬x)) = ¬(z + (y* ¬x)) = ¬z * ¬(y * ¬x) = ¬z * (¬y + x)

Так как конечная операция будет логическое умножение (**⋀,** или *), то проверять следует по строкам, в которых F=1, в этом случае и **¬z** и **(¬y + x)** должны быть одновременно равны 1.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
4	0	1	1	1

Легко заметить, что **¬z** будет равно 1 при **z** равном 0. А это – первый столбец таблицы:

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
4	0	1	1	1

Теперь в оставшихся столбиках 2, 3 и F (первый столбик уже не учитываем, он известен) найдем уникальную строку – такую, где в строке будет одна единица и функция будет равна 1. Это строка 2.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	???	???	F
2	0	0	1	1

Проанализируем выражение **(¬y + x).**

Предположим, что x=1, тогда y=0, а **¬y**=1. Выражение **(¬y + x).**в этом случае равно 1, нам это подходит.

Проверим на всякий случай и второй вариант, когда y=1, тогда x=0. выражение **(¬y + x)** в этом случае равно 0, что нам не подходит.

Таким образом, третий столбец – это x, а второй – y.

Ответ: zyx

В то же время эту задачу **можно решить проще**, не используя знаний законов преобразования логических функций.
Логическая функция *F* задается выражением **¬(z ∨ (y ∧ ¬x))** или **¬(z + (y * ¬x))**

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Ищем уникальную строку – ту, в которой одна переменная единица и F=1. Это строка 2.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
2	0	0	1	1

Рассмотрим эту строку и исходное выражение F=**¬(z + (y * ¬x)).**

Предположим, что x=1, тогда y=0 и z=0.

Тогда F=¬**(z + (y ∗ ¬x)) = ¬(0 + (0 ∗ 0)) = =¬(0 + 0) = ¬0 = 1**. Это значит, что третий столбец – это x. На всякий случай можно проверить и другие варианты:

Пусть y=1. Тогда x=0 и z=0. F=¬**(z + (y ∗ ¬x)) = ¬(0 + (1 ∗ 1)) = ¬(0 + 1) = ¬1 = 0**.
Пусть z=1. Тогда x=0 и y=0. F=¬**(z + (y ∗ ¬x)) = ¬(1+ (0 ∗ 1)) = ¬(1 + 0) = ¬1 = 0**.
Оба эти варианта не подходят.

Опять обращаемся к исходной таблице и ищем уникальную строку, не учитывая уже столбец x.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	X	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Это строка 4.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	X	F
4	0	1	1	1

Рассмотрим эту строку и исходное выражение F=¬**(z ∨ (y ∧ ¬x)) =¬(z + (y ∗ ¬x)).**

Пусть y=1. Тогда x=1 и z=0. F=¬**(z + (y ∗ ¬x)) = ¬(0 + (1 ∗ 0)) = ¬(0 ∨ 0) = ¬0 = 1** – это значит, что второй столбец – **y**. Для экономии места другие варианты проверять не будем. Хотя при наличии времени подстраховаться и проверить не мешало бы.

И, соответственно, первый столбец будет **z.**

Ответ – **ZYX**

Задача 8

Логическая функция F задается выражением X∧**(Y→Z).** Определить, какому столбцу таблицы истинности функции **F** соответствует каждая из переменных X,Y,Z.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

В ответе написать буквы X,Y,Z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

Решение

Для начала избавимся от импликации по формуле **a**→b=¬**a**∨**b:**

X∧**(Y→Z)** = X∧**(¬Y∨Z)** = X***(¬Y+Z)**

Найдем уникальную строку – в которой F=1 и только одна переменная равна единице. Это вторая строка:

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
2	0	0	1	1

Рассмотрим исходную функцию. F будет равна единице когда обе части выражения равны 1, то есть **X=1** и **(¬Y∨Z) =1**. **X** равно единице в третьем столбце, значит столбец 3 – это **X.**

Рассмотрим исходную таблицу и опять найдем уникальную строку, не учитывая уже столбец X.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	X	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	1	0

Такая уникальная строка будет четвертая:

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	X	F
4	0	1	1	1

Теперь рассмотрим выражение **(¬Y+Z)**, которое должно быть равно единице и проанализируем строку 4.

Пусть Y=1, тогда Z=0, выражение **¬Y+Z** будет равно 0, нам это не подходит.
Пусть Z=1, тогда Y=0, выражение **¬Y+Z** будет равно 1, нам это подходит.

Понятно, что **Y** – это первый столбец, а **Z** – второй.

Ответ: **YZX**

Задача 9

Логическая функция F задаётся выражением x → y → z. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	1
8	1	1	1	1

В ответе напишите буквы x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала – буква, соответствующая 1-му столбцу; затем – буква, соответствующая 2-му столбцу; затем – буква, соответствующая 3-му столбцу). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно. разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение

Сначала упростим данное выражение. Так как в выражении подряд идут две импликации, то их чередование рассматривается слева направо. Для удобства поставим скобки:

(x → y) → z

Теперь избавимся от импликации по правилу **a → b = ¬a ∨ b:**

¬(¬x ∨ y) ∨ z

Раскроем скобки. По закону де Моргана отрицание дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний:

x ∧ ¬y ∨ z

Поскольку последнее действие здесь дизъюнкция, то приравняем исходную функцию к нулю:

$x \wedge \neg y \vee z=0$ или $(x * \neg y) + z=0$

Эта функция будет равна 0 тогда и только тогда, когда обе ее части одновременно равны нулю, то есть и **$z=0$** и **$(x \wedge \neg y)=0$**

Найдем в таблице такую строку, в которой F=0 и есть только одно значение переменных равное 0. Это строка 4.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	???	???	F
4	0	1	1	0

Первый столбец равен 0, значит это **Z**. Обратите внимание - **$(x \wedge \neg y)$** не подходит, так как это выражение, а не переменная.

Далее переходим к исходной таблице и опять ищем уникальную строку (ту, в которой только одна единица и F=1, так как здесь последнее действие - конъюнкция), при этом столбец **Z** уже не учитываем. Рассматриваем только те строки, где **F=1**.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	???	???	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	1
4	0	1	1	0

Такой уникальной строкой будет строка 3. Будем рассматривать ее и выражение **$(x * \neg y)$,** которое должно быть равно 1.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	???	???	F
3	0	1	0	1

Предположим теперь, что $x=1$, тогда $y=0$. В этом случае выражение $(x + \neg y)$ будет равно 1, что нам подходит.

На всякий случай рассмотрим и вариант когда $y=1$, а $x=0$. Выражение $(x+ \neg y)$ будет равно 0, нам такое не подходит, ведь функция должна быть равна 1.

Значит, второй столбец – это **x**, а третий – **y**.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	X	Y	F
3	0	1	0	1

Ответ: ZXY

Задача 10

Логическая функция F задаётся выражением **(x ≡ z) ∨ (x ∧ y).** Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Решение

Сложность данного задания заключается в наличии в выражении эквиваленции. Так как последнее действие будет дизъюнкция, то следует рассматривать случай когда F=0.

F будет ложна только в случае, если каждая скобка в выражении **(x ≡ z) + (x * y)** будет ложна. Это значит, что для того, чтобы F была равна нулю, выражение **(x ≡ z)** должно давать 0, то есть переменные **x** и **z** не должны быть равнозначны. Выражение **(x * y)** пока не рассматриваем.

Сначала рассмотрим все строки в таблице, результат для которых равен нулю:

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
7	1	1	0	0

Рассмотрим три варианта расположения столбцов и значение функции F в этих вариантах.

	Перем. 1	Перем. 2	Функция
	X	Z	x ≡ z
2	0	0	1
3	0	1	0
7	1	1	1

	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Z	X	x ≡ z
2	0	1	0
3	1	0	0
7	1	0	0

	Перем. 1	Перем. 3	Функция
	???	???	F
2	0	1	0
3	0	0	1
7	1	0	0

Анализируем получившиеся таблицы.

Как мы видим, переменные x и z не могут находиться в комбинациях 1 и 2 столбец и 1 и 3 столбец. В этих вариантах функция не всегда равна нулю. Значит переменные **x** и **z** могут находиться только в 2 и 3 столбце, где функция всегда равна нулю. Это значит, что первый столбец соответствует переменной **y**.

Теперь нужно определить, какому столбцу соответствует **x**, а какому **z**.

Найдем уникальную строку – там, где в переменных есть одна единица и F=1. При этом первый столбец (**y**) учитывать уже не будем.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Y	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Такая строка у нас шестая.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Y	???	???	F
6	1	0	1	1

Рассмотрим эту строку таблицы, в которой выражение $(x \equiv z) + (x * y)$ будет истинно.

Пусть x=0, тогда y=1, z=1. В этом случае $F=(x \equiv z) + (x * y) = 0+0 = 0$ – нам не подходит, так как F равно 1.

Пусть x=1, тогда y=1, z=0. В этом случае $F=(x \equiv z) + (x * y) = 0 \vee 1=1$ – нам подходит, поскольку F равно 1.

Таким образом, получаем что первый столбец – это **y**, второй – **z**, третий – **x**.

Ответ: **YZX**

В то же время эту задачу **можно решить проще**, используя метод нахождения уникальной строки, то есть такой, где F=1и в строке только одна единица. Такой строкой здесь будет строка 5.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
5	1	0	0	1

Рассмотрим строку 5 и исходную функцию **$(x \equiv z) + (x * y)$.**

Пусть x=1, тогда y=0 и z=0. $F=(x \equiv z) + (x * y)=(1 \not\equiv 0) + (1 * 0) = 0 + 0 = 0$ – вариант не подходит, нужно чтобы F была равна 1.

Пусть z=1, тогда y=0 и x=0. $F=(x \equiv z) + (x * y)=(0 \not\equiv 1) + (0 * 0) = 0 + 0 = 0$ – вариант не подходит, нужно чтобы F была равна 1.

Пусть y=1, тогда x=0 и z=0. $F=(x \equiv z) + (x * y)=(0 \equiv 0) + (0 * 1) = 1 + 0 = 1$ – вариант подходит, F равна 1.

Таким образом, первый столбец – это **y**.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Теперь ищем уникальную строку не учитывая первый столбец (**y**). Это строка 6.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	Y	???	???	F
6	1	0	1	1

Рассмотрим строку 6 и исходную функцию $(x \equiv z) + (x * y)$.

Пусть x=1, тогда y=1 и z=0. $F=(x \equiv z) + (x * y)=(1 \not\equiv 0) \vee (1 * 1) = 0 + 1 = 1$ – этот вариант подходит.

Пусть z=1, тогда y=1 и x=0. $F=(x \equiv z) + (x * y)=(0 \not\equiv 1) \vee (0 * 1) = 0 + 0 = 0$ – этот вариант не подходит.

Таким образом, третий столбец – это x, соответственно второй – это y.

Ответ -**YZX**

Задача 11

Логическая функция F задаётся выражением **(x ∧ ¬y) ∨ (x ∧ z).** Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных **x, y, z**.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Решение

По закону дистрибутивности данное выражение можно упростить. Вынесем x за скобки:

(x ∧ ¬y) ∨ (x ∧ z)

x ∧ (¬y ∨ z) = x * (¬y + z)

Поскольку последняя операция в этом выражении – конъюнкция, то будем рассматривать случай когда F=1. Всё это выражение будет истинно в том (и только в том) случае, если значение переменной x будет равно 1.

Найдем уникальную строку – там, одна переменная равна 1 и F=1. Это пятая строка.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
5	1	0	0	1

Единица находится в первом столбце, значит этот столбец = **x**. (Выражение **(¬y + z)** не берем, так как это целое выражение, а не одиночная переменная).

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	X	???	???	F
1	0	0	0	0
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	0	1	1	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	1
7	1	1	0	0
8	1	1	1	1

Переходим к переменной **(¬y + z).** Так как здесь последнее действие – дизъюнкция, то нам нужно, чтобы выражение **(¬y + z)** было равно нулю, и, соответственно F=0.

Возвращаемся к исходной таблице и ищем такую строку, где x=1, а F=0. Это строка 7.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	X	???	???	F
7	1	1	0	0

Рассмотрим эту строку и выражение **(¬y + z).**
Пусть y=0, а z=1, тогда (¬y + z) = 1+1 = 1 – нам не подходит, значение выражения должно быть равно 0.
Пусть z=0, а y=1. Тогда (¬y + z) = 0+0 = 0 – подходит.
Значит y- это второй столбец, а z – третий.
Ответ: **XYZ**

Второе решение – более понятное.

В исходной таблице ищем уникальную строку – это строка 5.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	???	???	???	F
5	1	0	0	1

Будем рассматривать эту строку и исходное выражение **F=(x * ¬y) + (x * z).**
Предположим, что x=1. Тогда y=0, z=0. Подставим эти значения в формулу F.
F= (x * ¬y) + (x * z) = 1*1+1*0 = 1 – это нам подходит.
На всякий случай проверим другие варианты:
Пусть y=1, тогда x=0 и z=0. F= (x * ¬y) +(x * z) = 0*1+0*1= 0 – не подходит, так как F должно быть равно 1.
Пусть z=1. Тогда x=0 и y=0. F=(x * ¬y) + (x * z)= 0*0+0*1=0 – не подходит. Таким образом, единственный вариант – это x=1, то есть первый столбик – это **x**. Опять возвращаемся к исходной таблице и ищем уникальную строку, уже не учитывая при этом столбик x. Такая строка – строка 6.

	Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
	X	???	???	F
6	1	0	1	1

Рассмотрим эту строку и исходное выражение **F=(x * ¬y) + (x * z).**
У нас x=1. Пусть тогда y=1, тогда z=0. F= (x * ¬y) +(x * z) = 1*0+1*0=0 не подходит.
Пусть z=1, тогда x=1, y=0. F= (x * ¬y) + (x *z) = 1*1+1*1= этот вариант подходит. Значит, первый столбец – это **x**, второй – y, третий – **z.**
Ответ: XYZ

==

Задача 12

Дан фрагмент таблицы истинности для выражения F:

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	F
0		0		0			0
	1		1				1
	1					1	1

Каким выражением может быть F?

1. ¬x1 ∧ ¬x2 ∧ x3 ∧ ¬x4 ∧ ¬x5 ∧ x6 ∧ x7
2. x1 ∨ x2 ∨ x3 ∨ x4 ∨ ¬x5 ∨ ¬x6 ∨ x7
3. x1 ∧ ¬x2 ∧ ¬x3 ∧ x4 ∧ ¬x5 ∧ ¬x6 ∧ x7
4. x1 ∨ x2 ∨ x3 ∨ ¬x4 ∨ x5 ∨ ¬x6 ∨ x7

Решение

Обратим внимание на столбец F. Это разные значения **одной и той же функции**. Видно, что выражение в двух случаях истинно, а в одном — ложно. То есть выражение не может быть конъюнкцией, так как конъюнкция истинна только в одном случае, когда все части выражения истинны. А в таблице две истины.

Выходит, что выражение является дизъюнкцией а, значит варианты 1 и 3 нам не подходят.

Рассмотрим 2-й вариант ответа. В первой строке таблицы истинности отображены только значения x1, x3, x5, и все они равны нулю. Но в выражении у нас x5 отрицается, то есть значение x5 будет изменено на 1, и в результате всё выражение должно быть истинным. То есть 2-й вариант нам не подходит. Остаётся 4-й вариант.

Как мы видим, переменные x1, x3 и x5 в 4-м варианте ответа не отрицаются, что соответствует первой строке таблицы.

Ответ- вариант 4.

Задача 13

Дан фрагмент таблицы истинности для выражения F:

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	F
0					0		0
	1			0	1		0
1	0		0			1	1

Каким выражением может быть F?

1. ¬x1 ∧ x2 ∧ x3 ∧ ¬x4 ∧ x5 ∧ ¬x6 ∧ ¬x7
2. x1 ∨ ¬x2 ∨ ¬x3 ∨ x4 ∨ ¬x5 ∨ x6 ∨ ¬x7
3. x1 ∧ ¬x2 ∧ x3 ∧ ¬x4 ∧ ¬x5 ∧ ¬x6 ∧ x7
4. x1 ∨ x2 ∨ ¬x3 ∨ ¬x4 ∨ x5 ∨ x6 ∨ ¬x7

Решение

Обратим внимание на столбец F, в нём присутствует два нуля и одна единица. Выходит, что выражение не может быть дизъюнкцией, так как дизъюнкция ложна только в одном случае — когда все переменные равны нулю, у нас же в таблице два ложных результата и один истинный, значит выражением может быть только конъюнкция.

То есть ответы 2 и 4 однозначно не подходят, и мы можем проверить только варианты с конъюнкцией.

Проверим первое выражение по последней (единственно истинной) строке таблицы. Так как выражение является конъюнкцией, то для получения истины все переменные в выражении должны быть истинны. Для первого выражение это условие не выполняется, так как ¬x1 изменит 1 в таблице на 0, x2 в таблице ложно, ¬x7 изменит 1 в таблице на 0.

Остаётся единственным возможным ответ 3, но для уверенности лучше проверить и его:

x1 в таблице истинно, x2 в таблице ложно, но в выражении эта переменная отрицается, x4 в таблице ложно, но в выражении эта переменная отрицается, x7 в таблице истинно.

Ответ: **вариант 3**