Решение задания 16 ЕГЭ

Для решения этого задания нам нужно будет немного теории.

1. **Первое – повторяем правило составления таблицы тетрад.**

0	**0**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**0**	**1**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**2**
0	**0**	**1**	**1**	**3**
0	**1**	**0**	**0**	**4**
0	**1**	**0**	**1**	**5**
0	**1**	**1**	**0**	**6**
0	**1**	**1**	**1**	**7**
1	**0**	**0**	**0**	**8**
1	**0**	**0**	**1**	**9**
1	**0**	**1**	**0**	**A**
1	**0**	**1**	**1**	**B**
1	**1**	**0**	**0**	**C**
1	**1**	**0**	**1**	**D**
1	**1**	**1**	**0**	**E**
1	**1**	**1**	**1**	**F**

Зеленым выделена граница диад, синим – граница триад, красным – граница тетрад. Диады используются для записи числа в двоичной систем е счисления, триады – для записи числа в восьмеричной системе счисления, а тетрады – в шестнадцатеричной.

Правила заполнения таблицы. Сверху – вниз. Первый столбик – 8 нулей и 8 единиц. Второй столбик – 4 нуля и 4 единицы, третий – два нуля и две единицы, четвертый – один ноль и одна единица.

Как работать с таблицей. Пусть нам надо перевести из двоичной системы счисления в восьмеричную число 1011011010_2. Справа налево делим эту двоичную запись на триады.

001 011 011 010
1 3 3 2

Получилось: $1011011010_2 = 1332_8$.

Переведем это же двоичное число в шестнадцатеричную систему счисления. Теперь запись этого числа делим справа налево на тетрады:

0010 1101 1010
2 D A

Переведем это же двоичное число в четверичную систему счисления. Для этого справа налево двоичную запись числа делим на диады:

10 11 01 10 10
2 3 1 2 2

Получилось: $1011011010_2 = 23122_4$.

Переведем $F5_{16}$ в двоичную систему счисления.

F 5
1111 0101

Получилось: $F5_{16} = 1110101_2$.

Переведем 347_8 в двоичную систему счисления:

3 4 7
011 100 111

Получилось: $347_8 = 011100111_2$.

Переведем число 213_4 в двоичную систему счисления:

2 1 3
10 01 11

Получилось: $213_4 = 100111_2$.

2. **Далее – рассмотрим такое правило:** $a^n = \underbrace{1\ 0\ldots0}_{n}{}_a$

Примеры:

$\mathbf{2^3 = 1000_2}$
$\mathbf{7^5 = 100000_7}$
$\mathbf{10^2 = 100_{10}}$

Есть еще и второе правило (для двоичной системы счисления):

$$a^n - a^k = \underbrace{1\ldots\ldots1}_{n-k}\underbrace{0\ldots\ldots0}_{k}{}_a$$

Для системы счисления с другим основание это правило тоже действует, только вместо единиц будут стоять цифры, наибольшие в этой системе счисления. Например, при шестизначной системе счисления $\mathbf{6^8 - 6^3 = 55555000_6}$

О применении этой формулы будет позже в этом уроке.

1. **Рассмотрим правила вычитания.**

$$\begin{array}{r} -\,7\,5\,2\,1_{10} \\ 3\,8\,6_{10} \\ \hline 7\,1\,3\,5_{10} \end{array}$$

Мы занимаем в старших разрядах десятку, т.к. система счисления десятичная

$$\begin{array}{r} -\,6\,3\,5\,2_{8} \\ 7\,1\,4_{8} \\ \hline 5\,4\,3\,6_{8} \end{array}$$

Мы занимаем в старших разрядах восьмерку, т.к. система счисления восьмеричная

$$\begin{array}{r} \_\,5\ 1\ 4_7 \\ 3\ 5\ 6_7 \\ \hline 1\ 2\ 5_7 \end{array}$$

Мы занимаем в старших разрядах семерку, т.к. система счисления семеричная

2. **Рассмотрим правила сложения**

$$\begin{array}{r} 8\ 1\ 9\ 5_{10} \\ + \\ 3\ 8\ 6_{10} \\ \hline 8\ 5\ 9\ 1_{10} \end{array}$$

При переполнении разряда, т.е. если сумма больше 10, вычитается десятка и единица прибавляется к разряду, стоящему слева.

$$\begin{array}{r} 3\ 5\ 1\ 2_8 \\ + \\ 7\ 2\ 3_8 \\ \hline 4\ 4\ 3\ 5_8 \end{array}$$

При переполнении разряда, т.е. если сумма больше 8, вычитается восьмерка и единица прибавляется к разряду, стоящему слева.

$$\begin{array}{r} 1\ 2\ 3\ 4_5 \\ + \\ 3\ 3\ 3\ 3_5 \\ \hline 1\,0\ 1\ 2\ 2_5 \end{array}$$

При переполнении разряда, т.е. если сумма больше 5, вычитается пятерка и единица прибавляется к разряду, стоящему слева.

3. **Рассмотрим правила вычитания степеней**

$10^4 - 10^2$

$$\begin{array}{r} \_\,1\ 0\ 0\ 0\ 0_{10} \\ 1\ 0\ 0_{10} \\ \hline 9\ 9\ 0\ 0_{10} \end{array}$$

$3^6 - 3^2$

$$\begin{array}{r} \_\,1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_3 \\ 1\ 0\ 0_3 \\ \hline 2\ 2\ 2\ 2\ 0\ 0_3 \end{array}$$

Получается, что в конце стоит столько нулей, какая степень второго вычитаемого, а перед ними – максимальная цифра степени, в количестве равном разности степеней вычитаемых. Еще примеры:

$2^4 - 2^2$

$$\begin{array}{r} \_\,1\ 0\ 0\ 0\ 0_2 \\ 1\ 0\ 0_2 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0_2 \end{array}$$

$7^6 - 7^2$

$$\begin{array}{r} \_\,1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_7 \\ 1\ 0\ 0_7 \\ \hline 6\ 6\ 6\ 6\ 0\ 0_7 \end{array}$$

То есть при вычитании степеней младшая степень – это количество нулей в конце, а разность степеней – это количество самых больших чисел в этой системе счисления.

4. **Рассмотрим правила сложения степеней.**

$$\begin{array}{r} 10000000 \\ + \quad 1000 \\ \hline 10001000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10000000 \\ + \quad 2214 \\ \hline 10002214 \end{array}$$

Переходим к решению задач.

$\mathbf{8^{500} + 4^{1500} - 2^{100}}$ Будем искать все цифры, которые получатся в результате вычислений, так как неизвестно, каким будет условие на экзамене: каким будет результат, сколько каких цифр получится, какова сумма цифр и т.п.

Для начала надо все числа привести к одному основанию.

$\mathbf{8^{500} + 4^{1500} - 2^{100} = 2^{1500} + 2^{3000} - 2^{100}}$

Далее **(Важно!)** надо расположить все числа по убыванию степеней.

$\mathbf{8^{500} + 4^{1500} - 2^{100} = 2^{1500} + 2^{3000} - 2^{100} = 2^{3000} + 2^{1500} - 2^{100}}$

Мы уже знаем (смотри формулы выше), что $\mathbf{2^{3000}}$ это единица и три тысячи нулей. Разность

$\mathbf{2^{1500} - 2^{100} = \underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{1400}\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{100}{}_2}$ **,** формула была приведена выше:

$$\mathbf{a^n - a^k = \underbrace{1\ldots\ldots1}_{n-k}\underbrace{0\ldots\ldots0}_{k}{}_a}$$

Прибавляем теперь эту разность к $\mathbf{2^{3000}}$

$\mathbf{2^{3000} + (2^{1500} - 2^{100}) =}$

$$\mathbf{1\,\overbrace{\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{1500}\,\underbrace{1\ldots\ldots\ldots1\;0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{\text{Это разность } 2^{1500} - 2^{100} = 1400 \text{ единиц и } 100 \text{ нулей}}}^{3000 \text{ нулей}}}$$

Разность $\mathbf{2^{1500} - 2^{100}}$ состоит из 1400 единиц и 100 нулей (всего 1500 знаков). Прибавляя ее к $\mathbf{2^{3000}}$ получаем еще одну единицу и (3000 – 1500 =1500) нулей.

Таким образом, получаем ответ: **1401 единица и 1600 нулей.**

Следующая задача.

$\mathbf{3^{1000} + 3^{500} - 3^{100} =?}$

$\mathbf{3^{1000} = 1\,\underbrace{0\ldots\ldots0}_{1000}{}_3}$

Вычисляем разность $\mathbf{3^{500} - 3^{100}}$

$$3^{500} - 3^{100} = \underbrace{2\ldots\ldots\ldots2}_{400}\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{100}{}_{3}$$

Складываем $\mathbf{3^{1000}}$ и $\mathbf{3^{500} - 3^{100}}$

$$3^{1000} + 3^{500} - 3^{100} = 1\,\overbrace{\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{500\text{ нулей}}\,\underbrace{2\ldots\ldots\ldots\ldots2}_{400\text{ двоек}}\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{100\text{ нулей}}}^{1000\text{ нулей}}{}_{3}$$

Ответ: **1 единица, 600 нулей и 400 двоек**

Следующая задача.

$$2^{1000} + 2^{300} - 100 = ?$$

Здесь у нас 100 –это не степень двойки. Выйти из положения можно следующим образом. Возьмем степень двойки, **большую** чем 100. Это $2^7 = 128$. Из 128 можно получить 100 вычитая из 126 степени двойки. То есть $\mathbf{100 = 128 - 16 - 8 - 4 = 2^7 - 2^4 - 2^3 - 2^2}$

Таким образом исходная задача будет выглядеть следующим образом:

$$2^{1000} + 2^{300} - 100 = 2^{1000} + 2^{300} - 2^7 + 2^4 + 2^3 + 2^2$$

Если бы мы взяли степень двойки меньшую чем 100, а это 64, то нам, чтобы получить -100 пришлось бы не слагать степени двойки, а вычитать, а это нежелательно:

$-100 = -64 - 32 - 4 = - 2^6 - 2^5 - 2^2$ или, переходя к условию задачи

$$2^{1000} + 2^{300} - 100 = 2^{1000} + 2^{300} - 64 - 32 - 4 = - 2^6 - 2^5 - 2^2$$

Выше мы видели, что действие вычитание сложнее сложения.

Решаем. $\mathbf{2^{1000}}$ – это единица и одна тысяча нулей: $\mathbf{2^{1000} = 1\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{1000\text{ нулей}}{}_{2}}$

$$2^{1000} + 2^{300} - 2^7 = 1\,\overbrace{\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{700\text{ нулей}}\,\underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{293\text{ единицы}}\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{7\text{ нулей}}}^{1000\text{ нулей}}{}_{2}$$

Перепишем это несколько по другому и произведем сложение:

$$2^{1000} + 2^{300} - 2^7 = 1\,\overbrace{\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{700\text{ нулей}}\,\underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{293\text{ единицы}}\,0\;0\;0\;0\;0\;0\;0}^{1000\text{ нулей}}{}_{2}$$

$\mathbf{1\;0\;0\;0\;0}$ - это 2^4

$\mathbf{1\;0\;0\;0}$ - это 2^3

$\mathbf{1\;0\;0}$ - это 2^2

При сложении мы получим:

$$2^{1000} + 2^{300} - 2^7 = 1\overbrace{\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{700\text{ нулей}}\ \underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{293\text{ единицы}}0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}^{1000\text{ нулей}}{}_2$$

$1\ 0\ 0\ 0\ 0$ - это 2^4

$1\ 0\ 0\ 0$ - это 2^3

$1\ 0\ 0$ - это 2^2

$$1\underbrace{0\ldots\ldots\ldots0}_{700\text{ нулей}}\underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{293\text{ единицы}}0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0_2$$

Таким образом, ответ: **297 единиц и 704 нуля.**

Следующий пример

$2^{700} - 2^{300} + 2^{100} = ?$

$$2^{700} - 2^{300} + 2^{100} = \overbrace{\underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{400\text{ единиц}}\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{300\text{ нулей}}}^{700\text{ нулей}}{}_2 + 2^{100} \text{ или}$$

$$2^{700} - 2^{300} + 2^{100} = \overbrace{\underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{400\text{ единиц}}\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{199\text{ нулей}}\ 1\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{100\text{ нулей}}}^{700\text{ нулей}}{}_2$$

Ответ: **401 единица и 299 нулей.**

Следующая задача

$2^{700} - 2^{300} + 35_{10} = ?$

Переводим **35_{10}** в двоичную систему. **$35_{10} = 100011_2$**

$$2^{700} - 2^{300} + 100011_2 = \overbrace{\underbrace{1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots1}_{400\text{ единиц}}\ \underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{293\text{ нуля}}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}^{700\text{ нулей}}{}_2$$

Ответ: **403 единицы и 297 нулей**

Следующая задача

$2^{1500} + 2^{1000} - 2^{500} - 2^{100} + 7 = ?$

$2^{1500} + 2^{1000} - 2^{500} - 2^{100} + 111_2 = ?$ По-прежнему действует правило: числа располагаются слева направо с уменьшением степеней.

Стандартным способом, как раньше, решить задачу не получится. Дело в том, что такие задачи легко решаются тогда, когда справа от единиц стоит много нулей подряд, с ними действия решаются легко. Много нулей у нас (смотри выше) получается когда у вычитаемого большая степень, от нее зависит количество нулей. У нас же получается большое количество единиц:

$2^{1500} - 2^{500}$ = 1 тысяча единиц и 500 нулей

700 нулей

2^{1000} – 2^{100} = 900 единиц и 100 нулей

Пример:

11111111111111111111000000000000000000000000000000000000000
1111111000000000000

В этом случае и сложение и вычитание выполняются легко.

111111111111111111111111111111111110000000000000000000000
11111111111111111000000000000

В этом случае когда единица стоит под единицей и сложение и вычитание выполняются гораздо сложнее.

Очевидно, что нам мешает вычитаемое - **2^{500}**. Однако эту сложность можно легко устранить. Например -50 =-100 + 50. Или: **$-2^{500} = -2^{501} + 2^{500}$**

Перепишем исходную задачу так:

$2^{1500} + 2^{1000} – 2^{500} - 2^{100} + 7 = 2^{1500} + 2^{1000} – 2^{500} - 2^{100} + 111_2 = 2^{1500} + 2^{1000} – 2^{501} + 2^{500} – 2^{100} + 111_2$

$2^{1500} + (2^{1000} – 2^{501}) + (2^{500} – 2^{100}) + 111_2$

В этом выражении:

2^{1500} – это 1 и 1500 нулей
(2^{1000} – 2^{501}) – это 499 единиц и 501 ноль
(2^{500} – 2^{100}) – это 400 единиц и 100 нулей

Если нарисовать схематично (количество единиц и нулей показано произвольно, без учета их точного количества) расположение этих единиц и нулей, получится примерно так:

1 000000000000 0000000000000000000000000000000000000000000000000 это **2^{1500}**
11111111111111111 0000000000000000000000000000000 это **(2^{1000} – 2^{501})**
11111111111 000000000000 это **(2^{500} – 2^{100})**
111 это 7_{10}

В результате получим: **единиц – 1+499+400+3=903**
нулей – 1500 – 499 -400 – 3 = 598

Всего – **1501 цифра**

Следующая задача

$3^{100} + 3^{50} - 50 = ?$

Переведем 50_{10} в троичную систему счисления. $50_{10} = 1212_3$

$3^{100} + 3^{50} - 1212_3$. **$3^{100} = 1\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots..0}_{100\ нулей}\ _3$** **$3^{50} = = 1\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots..0}_{50\ нулей}\ _3$**

Посмотрим, как будет вычитаться 1212_3 из единицы с большим количеством нулей.

_1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
1 2 1 2

2 2 2 2 2 2 2 1 0 1 1   т. к. система счисления троичная, то занимаем в старших разрядах тройку.

То есть получается, что вычитаемое 1212_3 влияет только на конец системы записи единиц и нулей, а слева пойдут двойки.

Таким образом, $\mathbf{3^{50} - 1212_3 = 1\,\underbrace{2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.2}_{46\ двоек}\,1011_3}$

Таким образом **3^{50} -50 = 4 единицы, 46 двоек и 1 ноль.**

Теперь прибавляем это число к $\mathbf{3^{100}}$, то есть к единице и 100 нулям. Получится следующее:

$\mathbf{3^{100} + 3^{50} - 1212_3 = 1\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots0}_{50\ нулей}\underbrace{2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.2}_{46\ двоек}\,1011_3}$

Ответ: **4 единицы, 51 ноль и 46 двоек**

Следующая задача

$\mathbf{3^{100} - 3^{50} + 50 = ?}$

$\mathbf{3^{100} - 3^{50} + 50 = 3^{100} - 3^{50} + 1212_3 = 1\,\underbrace{2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots2}_{50\ двоек}\,1\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0}_{46\ нулей}\,1212_3}$

Ответ: 46 нулей, 4 единицы и 50 двоек.

Следующая задача

$\mathbf{8 * 6^{300} - 6^{200} + 3 = ?}$

Это шестеричная система счисления. Но в шестеричной системе счисления нет цифры 8, значит надо 8 перевести в шестеричную систему счисления. Это будет $\mathbf{12_6}$.

$\mathbf{6^{300}}$ – это единица и 300 нулей: $\mathbf{6^{300} = 1\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots..0}_{300\ нулей}{}_6}$

$\mathbf{8 * 6^{300}}$ будет $\mathbf{= 12\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0}_{300\ нулей}{}_6}$ **(1* 12 = 12)**

На произвольном примере посмотрим как вычитать в шестеричной системе.

$$
\begin{array}{r}
\_12\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_6 \\
1\ 0\ 0_6 \\
\hline
11\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 0\ 0\ 0_6
\end{array}
$$

Здесь мы занимаем в старших разрядах шестерку, т. к. система шестеричная.

$\mathbf{8 * 6^{300} - 6^{200} + 3 = 11\,\underbrace{5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.5}_{100\ пятерок}\,\underbrace{0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..0}_{199\ нулей}3_6}$

Ответ: **2 единицы, 100 пятерок, 199 нулей и 1 тройка.**

Следующая задача

$\mathbf{7* 3^{500} + 3^{200} - 3^{100} – 3^{50} =?}$

Опять действует правило – числа располагаются слева направо с уменьшением степеней. И опять, как было показано выше, нам мешают идущие подряд две разности. Надо избавиться от одной из них. Избавляемся от $\mathbf{-3^{100}}$. Действовать так, как мы решали предыдущую задачу в двоичной системе счисления уже нельзя, то есть записать $\mathbf{-3^{100} = -3^{101} +3^{100}}$ нельзя, в троичной системе, как и в других, отличных от двоичной, такое правило не работает.

Рассмотрим, к примеру, как получить – 27. Это будет так: - 27 = - 81 + 27 +27 или

$- 27 = \mathbf{- 3^3 = - 3^4 +3^3 +3^3}$ или $\mathbf{- 3^3 = - 3^4 +2*3^3}$

Такое же правило действует и на другие системы счисления. Например $\mathbf{-6^5 = - 6^6 +5*6^5}$

Итак, изменим $\mathbf{– 3^{100}}$. Согласно вышеприведенному правилу, это будет так: $\mathbf{– 3^{100} = – 3^{101} +2*3^{100}}$

Перепишем исходное условие.

$\mathbf{7* 3^{500} + 3^{200} - 3^{100} – 3^{50} = 7* 3^{500} + (3^{200} - 3^{101}) + (2*3^{100} – 3^{50}) =?}$

Поскольку у нас система счисления троичная, нам желательно 7 перевести в троичную систему счисления $\mathbf{7 = 21_3}$.

Вычисления начнем с $\mathbf{2*3^{100} – 3^{50}}$ **.**

$\mathbf{3^{100} – 3^{50}}$ это 50 двоек и 50 нулей. С учетом множителя 2 это будет выглядеть так:

$$\mathbf{2*3^{100} – 3^{50} = 1\ \underbrace{2\ldots\ldots2}_{\text{50 двоек}}\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\text{50 нулей}}}$$

Откуда появилась единица? Когда мы делали такое действие в двоичной системе счисления, старшая единица при занимании превращалась в 0, то есть уменьшалась на единицу. У нас же сейчас в старшем разряде стоит двойка, при уменьшении на единицу получается единица.

Произведем вычисление в скобке $\mathbf{(3^{200} - 3^{101})}$.

$$\mathbf{3^{200} - 3^{101} = \underbrace{2\ldots\ldots2}_{\text{99 двоек}}\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\text{101 ноль}}}$$

Теперь будем складывать $\mathbf{(3^{200} - 3^{101}) + (2*3^{100} – 3^{50})}$.

Скобка $\mathbf{(2*3^{100} – 3^{50})}$ занимает 101 разряд (1 единица, 50 двоек и 50 нулей) и как раз помещается под нулями выражения $\mathbf{3^{200} - 3^{101}}$ то есть сумма $\mathbf{(3^{200} - 3^{101}) + (2*3^{100} – 3^{50})}$ будет выглядеть так:

$$\mathbf{(3^{200} - 3^{101}) + (2*3^{100} – 3^{50})= \underbrace{2\ldots\ldots2}_{\text{99 двоек}}\ 1\ \underbrace{2\ldots\ldots2}_{\text{50 двоек}}\ \underbrace{0\ldots\ldots0}_{\text{50 нулей}}}$$

Нам осталось к полученному прибавить $\mathbf{7* 3^{500}}$ **.** Это слагаемое будет выглядеть как 21 и 500 нулей. (Как получилось 21 – это 21*1). Окончательно:

$$\mathbf{7*3^{500} +(3^{200} - 3^{101}) + (2*3^{100} – 3^{50})= 21\ \underbrace{0\ldots0}_{\text{300 нулей}}\ \underbrace{2\ldots\ldots2}_{\text{99 двоек}}\ 1\ \underbrace{2\ldots2}_{\text{50 двоек}}\ \underbrace{0\ldots0}_{\text{50 нулей}}}$$

Таким образом, **ответ – 350 нулей, 2 единицы, 150 двоек**